SOLUÇÕES PEDAGÓGICAS

# SUPPORT

# A MATEMÁTICA NO PISM III
# PROF. KELLER LOPES

## A MOTIVAÇÃO

# TEMAS DO PISM III

- Geometria Analítica.
- Polinômios e Equações Polinomiais.
- Sistemas Lineares.
- Análise Combinatória.

# ANÁLISE COMBINATÓRIA

## PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM (PFC)

**(PISM)** Manoel esqueceu-se da senha de seu e-mail. Ele sabia que a senha de 5 dígitos distintos era formada pelos dígitos 1, 2, 3, 4 e 5. Além disso, lembrou-se de que o primeiro dígito era diferente de 1, e que o último era diferente de 5. O número máximo de senhas distintas que ele deverá testar para acessar o seu e-mail é:

a) 66

b) 72

c) 78

d) 116

e) 120

# Solução **1 , 2, 3 , 4 e 5**

**2** ______ ______ ______ ______

3 x 2 x 1 x 3 = 18

**3** ______ ______ ______ ______

3 x 2 x 1 x 3 = 18

**4** ______ ______ ______ ______

3 x 2 x 1 x 3 = 18

**5** ______ ______ ______ ______

4 x 3 x 2 x 1 = 24

**TOTAL: 78**

**(PISM III)** Uma classe tem 18 meninas, incluindo Victória e Karine. De quantas maneiras é possível escolher um time de basquete (5 jogadoras), de modo que Victória e Karine não estejam ambas no time?

a) 3.640

b) 4.368

c) 5.728

d) 8.008

e) 8.568

Solução

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Total de times:

$$C_{18,5} = \frac{18!}{5!(18-5)!} = 8.568$$

Total de times com Victória e Karine juntas.

$$C_{16,3} = \frac{16!}{3!(16-3)!} = 560$$

Total de times sem Victória e Karine juntas.

8.568 – 560 = 8.008

**GABARITO D**

# PISM III - 2016

Para concorrer a eleição a diretor e a vice-diretor de uma escola, há 8 candidatos. O mais votado assumirá o cargo de diretor e o segundo mais votado, o de vice-diretor. Quantas são as possibilidades de ocupação dos cargos de diretor e vice-diretor dessa escola?

a) 15

b) 27

c) 34

d) 56

e) 65

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$A_{8,2} = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8!}{6!} = 8.7 = 56$$

**GABARITO D**

**(PISM III)** Formam-se os anagramas da palavra **FUTEBOL**. Em quantos desses anagramas a letra T não aparece em sua posição original?

a)120

b) 720

c) 1.320

d) 4.320

e) 5.040

Total de anagramas $P_n = n! = 7! = 5.040$

ANAGRAMAS COM T NA POSIÇÃO ORIGINAL

$$\_\_\_ \quad \_\_\_ \quad \underline{\text{T}} \quad \_\_\_ \quad \_\_\_ \quad \_\_\_ \quad \_\_\_$$

$$P_6 = 6! = 720$$

Total de anagramas pedidos: 5.040 – 720 = 4.320

**GABARITO D**

# PROBABILIDADES

**(PISM)** Dois dados cúbicos, ambos com faces numeradas de 1 a 6, respectivamente, são lançados simultaneamente. A probabilidade de que o máximo dentre os resultados ocorridos seja menor ou igual a 4 é:

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{4}{9}$

c) $\frac{5}{9}$

d) $\frac{2}{3}$

e) $\frac{7}{18}$

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Nº de casos possíveis: 6 x 6 = 36

Nº de casos favoráveis:

$$\{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\} = 16$$

$$P(A) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

GABARITO B

**(PISM)** Entre 200 pessoas entrevistadas em uma academia, 100 praticam musculação, 80 praticam natação, 40 praticam musculação e natação. Entre as pessoas entrevistadas, qual a probabilidade de se escolher, ao acaso, uma pessoa que pratica musculação ou natação?

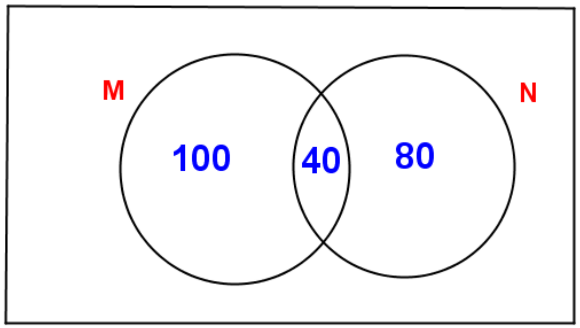
a) $\frac{3}{10}$

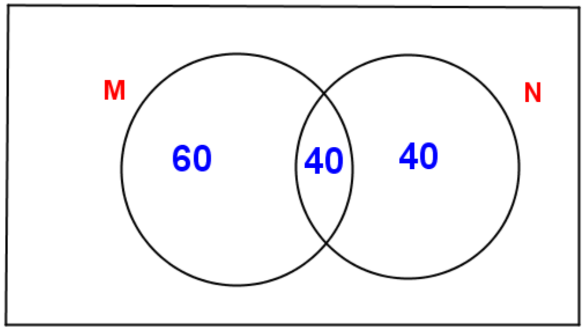
b) $\frac{2}{5}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{7}{10}$

e) $\frac{9}{10}$




$$P(M \cup N) = P(M) + P(N) - P(M \cap N)$$

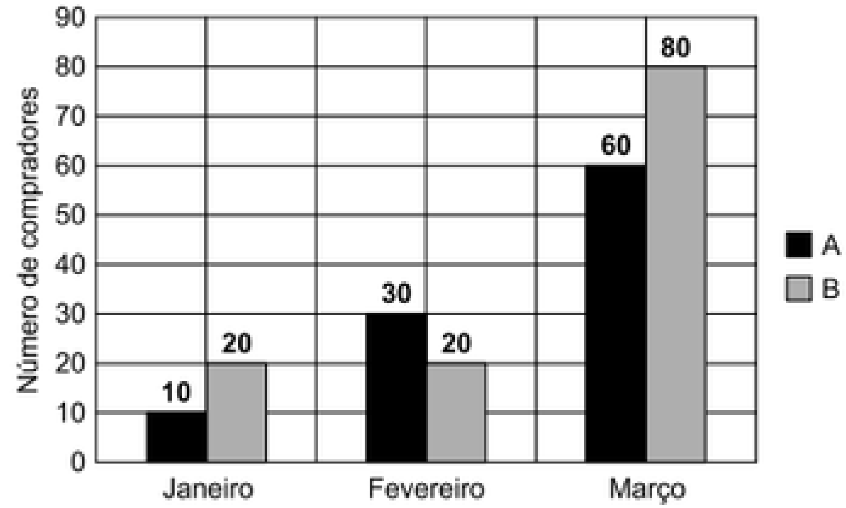
$$P(M \cup N) = \frac{1\cancel{0}\cancel{0}}{2\cancel{0}\cancel{0}} + \frac{8\cancel{0}}{20\cancel{0}} - \frac{4\cancel{0}}{20\cancel{0}} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$$

Outra solução:

$$P(M \cup N) = \frac{14\cancel{0}}{20\cancel{0}} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

Gabarito D

**(ENEM)** Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:




A probabilidade do ganhador do sorteio dos compradores do produto A ter realizado a compra no mês de fevereiro é de $\frac{30}{100}$.Já a probabilidade para o produto B é de $\frac{20}{120}$.

Assim a probabilidade pedida é de $\frac{30}{100}.\frac{20}{120}=\frac{1}{20}$

A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

a) 1/20 b) 3/242 c) 5/22 d) 6/25 e) 7/15

**(PISM III – 2016)** A área do triângulo de vértices A(4,5), B(1,2) e C(3,2) é:

a) 2

b) 3

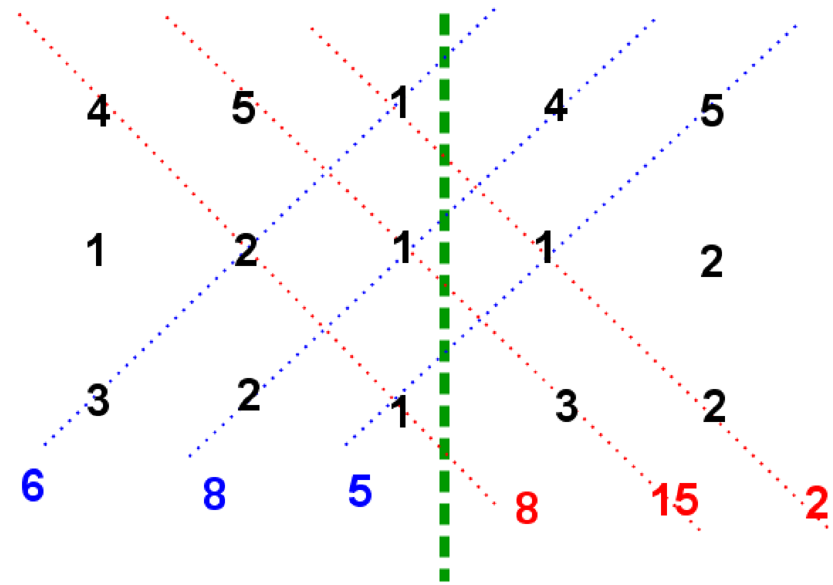
c) 4

d) 5

e) 6

$$A = \frac{1}{2}.|D|$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$




$$D = 8 + 15 + 2 - 6 - 8 - 5 = 6$$

$$A = \frac{1}{2}.|D|$$

$$A = \frac{1}{2}.|6| = 3$$

**(PISM III)** Ao calcular o menor caminho entre o ponto (15,9) e a circunferência de equação $(x-3)^2+(y-4)^2=100$ obtém-se:

a) 3.

b) 7.

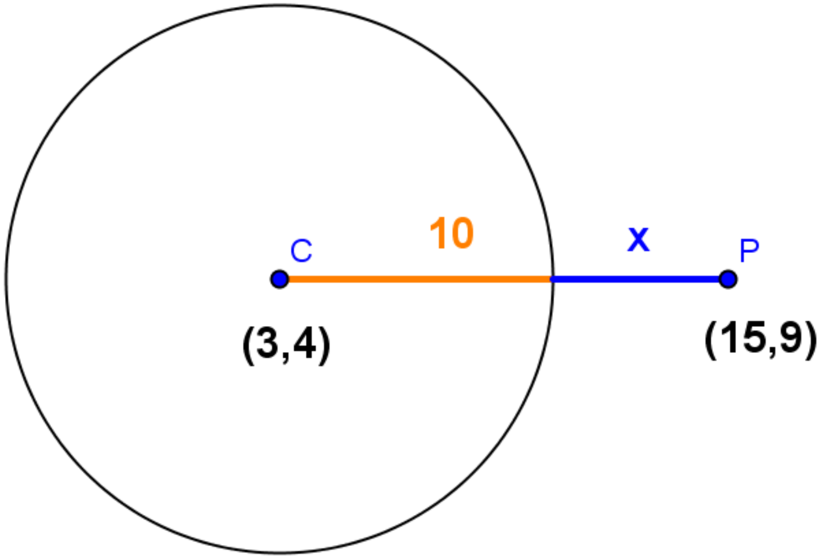
c) 13.

d) 23.

e) 12.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad C(a,b)=(3,4)$$

$$R^2=100 \Rightarrow R=10$$




$$d_{PC}=\sqrt{(x_P-x_C)^2+(y_P-y_C)^2}$$

$$d_{PC}=\sqrt{(15-3)^2+(9-4)^2}=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13$$

$$10+x=13 \Rightarrow x=3$$

GABARITO A

**(PISM III)** Considere as retas *r* e *s* de equações: $r: y-2x+2=0$ e $s: 4y-3x-1=0$. Sabendo que o ponto $A(\alpha.6)$ pertence à reta *r*, a distância de A à reta *s* é:

a) um número racional entre 1 e 5.

b) um número racional entre 0 e 1.

c) zero, pois A pertence à reta s.

d) um número irracional entre 0 e 1.

e) um número irracional entre 1 e 5.

$$6-2.\alpha+2=0 \Rightarrow 2\alpha=8 \Rightarrow \alpha=4$$

$$A(4,6)$$

$$\mathrm{d}_{\mathrm{P},s}=\frac{|ax_P+by_P+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$d_{A,s=}\frac{|4.4+(-3).6+(-1)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|-3|}{\sqrt{25}}=\frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{5}=0,6$$

GABARITO B

**(PISM III)** Considere a circunferência $C_1$ de equação $x^2+y^2-8x-2y+8=0$. Seja $C_2$ a circunferência concêntrica com $C_1$ e tangente à reta *y* = *x*. A equação da circunferência $C_2$ é:

**a)** $2x^2+2y^2-16x-4y+25=0$

**b)** $x^2+y^2-8x-2y+6=0$

**c)** $x^2+y^2-8x-2y+12=0$

**d)** $2x^2+2y^2-16x-4y+8=0$

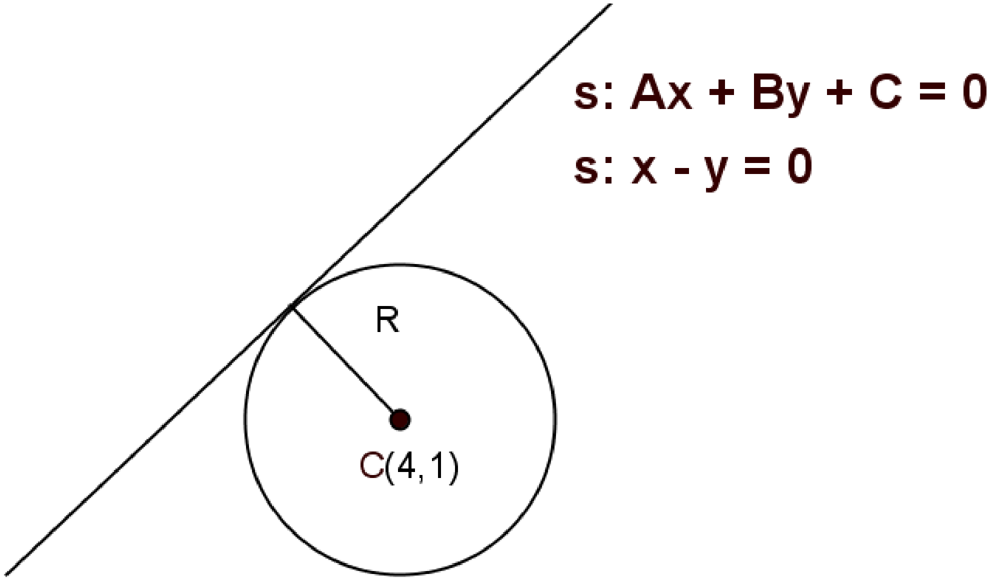
**e)** $2x^2+2y^2-8x-2y+8=0$

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0$$

$$-2a=-8\rightarrow a=4$$

$$-2b=-2\rightarrow b=1$$

$$C_1=C_2=(4,1)$$




$$R = d_{C,s} = \frac{\left|Ax_p + By_p + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{\left|1.4 + (-1).1 + 0\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$x^2 + y^2 - 2.4x - 2.1y + 4^2 + 1^2 - \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0$$

$$2x^2 + 2y^2 - 16x - 4y + 25 = 0$$

GABARITO A

**(PISM III)** Considere *MNT* o triângulo de vértices *M*(5,2), *N*(1,-3) e *T*(-3,4) . A equação analítica da reta suporte da altura relativa ao lado *NT* é:

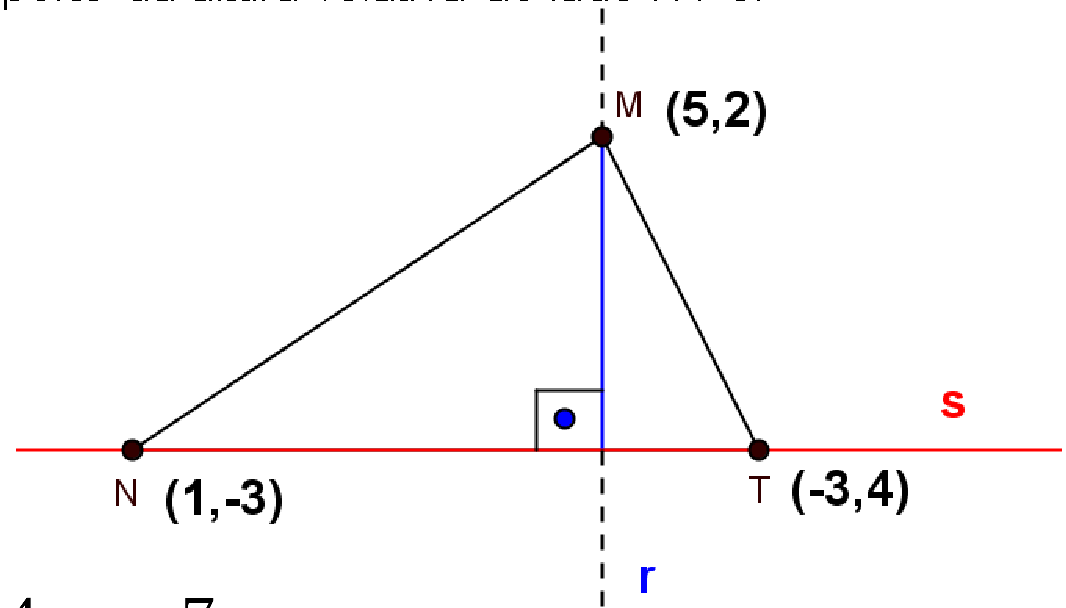
a) $4y + 7x + 5 = 0$.

b) $7y + 4x - 34 = 0$.

c) $4y + 7x - 55 = 0$.

d) $7y + 4x + 17 = 0$.

e) $7y - 4x + 6 = 0$.




$$m_s = \frac{y_N - y_T}{x_N - x_T} = \frac{-3-4}{1-(-3)} = -\frac{7}{4}$$

r é perpendicular à reta s, então:

$$m_r = -\frac{1}{m_s} = \frac{4}{7}$$

$$y - 2 = \frac{4}{7}.(x-5) \rightarrow 4x - 7y - 6 = 0 \ .(-1) \qquad 7y - 4x + 6 = 0$$

GABARITO E

# SISTEMAS LINEARES

**(PISM III – 2016)** A soma dos algarismos de um número N de três algarismos é 18, o algarismo da unidade é duas vezes maior do que o algarismo da dezena. Trocando-se o algarismo das centenas com o algarismo das unidades obtemos um número M maior que N em 198 unidades. Determine o número N.

**Solução:**

Sejam c, d e u, respectivamente, os algarismos das centenas, dezenas e unidades de N.

$$N = 100.c + 10.d + 1.u \qquad M = 100.\mathrm{u} + 10.d + 1.\mathrm{c}$$

$$M = N + 198$$

$$100.\mathrm{u} + 10.d + 1.\mathrm{c} = 100.\mathrm{c} + 10.\mathrm{d} + 1.\mathrm{u} + 198$$

$$u - c = 2 \qquad c + d + u = 18 \qquad \text{e} \qquad u = 2.d$$

$$\begin{cases} u - c = 2 \\ c + d + u = 18 \\ u - 2d = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} c &= 6 \\ d &= 4 \\ u &= 8 \end{aligned} \qquad N = 648$$

**(PISM III)** Um reservatório d'água é abastecido por três torneiras A, B e C. No quadro a seguir, estão relacionados os volumes de água fornecidos pelo conjunto das torneiras em diferentes meses e o número de dias que cada uma ficou aberta no respectivo mês.

| Mês | Torneiras | | | Volume de água fornecido em( $m^3$ ) |
|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | |
| 1° | 5 dias | 6 dias | 6 dias | 57 |
| 2° | 6 dias | 6 dias | 7 dias | 64 |
| 3° | 7 dias | 5 dias | 6 dias | 60 |

Num determinado mês, as torneiras A, B e C foram abertas por 6, 5 e 8 dias, respectivamente. Calcule o volume de água, em $m^3$, fornecido nesse mês?

a) 62 b) 63 c) 64 d) 65 d) 66

Sejam: x o volume de água fornecido pela torneira A, y o pela torneira B e z o pela torneira C.

$$\begin{cases} 5x+6y+6z=57 \text{ .......... I} \\ 6x+6y+7z=64 \text{ .......... I I} \\ 7x+5y+6z=60 \text{ ..........I I I} \end{cases}$$

I I I - I I $\rightarrow$ 2x - y = 3 .......... IV

6 . II - 7 . I $\rightarrow$ $\begin{cases} 36x+36y+42z=384 \\ 35x+42z+42z=399 \end{cases} \rightarrow$ x - 6 y = - 15 .......... V

IV e V $\rightarrow$ $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x-6y=-15 \end{cases} \rightarrow x=3$ e $y=3,$ então $z=4$

Logo, o volume de àgua fornecido no mês pedido foi:

6 . 3 + 5 . 3 + 8 . 4 = 65

GABARITO D

## DISCUTINDO SISTEMAS LINEARES (PISM III)

Considere o sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

nas variáveis $x$, $y$ e $z$. Sobre esse sistema, podemos afirmar que

**a)** possui uma única solução.
**b)** possui exatamente três soluções.
**c)** possui infinitas soluções.
**d)** não possui soluções.
**e)** não possui soluções ou possui infinitas soluções.

Se o número de equações de um sistema for diferente do número de incógnitas, o sistema é possível e indetermninado ou impossível.

**PISM III - 2016**

Sobre um sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ com a,b,c,d,e e f $\in R - \{0\}$.

É CORRETO afirmar que:

a) Se $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ e $\frac{a}{b} = \frac{f}{e}$, o sistema possui uma única solução.

b) Se $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ e $\frac{a}{b} \neq \frac{f}{e}$, o sistema não possui solução.

c) Se $\frac{a}{b} \neq \frac{d}{e}$, o sistema possui infinitas soluções.

d) Se $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ e $\frac{a}{b} = \frac{f}{e}$, o sistema não possui solução.

e) Se $\frac{a}{b} \neq \frac{d}{e}$ , o sistema não possui solução.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ SPI retas coincidentes

$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ SI retas paralelas

$\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$ SPD retas concorrentes

As trocas abaixo são válidas:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \rightarrow \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{d}{e} \text{ e } \frac{a}{b} = \frac{f}{e}$$

## (PISM III)

Se det $\neq 0 \rightarrow$ SPD

Se det $= 0 \rightarrow$ SPI ou SI

Seja o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 3y + z = 4 \\ x + y + (a^2 - 3)\,z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 - 3 \end{pmatrix} \neq 0$$

Para que esse sistema seja possível e determinado, devemos ter:

a) $a \neq 3$ e $a \neq -3$.

b) $a = 2$ ou $a = -2$.

c) qualquer $a \in \mathbb{R}$.

d) $a \neq 2$ e $a \neq -2$.

e) $a \neq \sqrt{3}$ e $a \neq -\sqrt{3}$.

$$2a^2 - 8 = 0 \rightarrow a = 2 \text{ ou } a = -2$$

GABARITO B

# (PISM III)

Joaquim, ao resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 9 \\ x - 2y - 3z = 1 \\ x - 9y - 10z = -6 \end{cases}$$

optou por escalonamento e obteve

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

É **CORRETO** afirmar que a solução de Joaquim está:

**a)** correta e o sistema não admite solução.
**b)** correta e o sistema tem solução única.
**c)** correta e o sistema tem infinitas soluções.
**d)** errada, embora o sistema tenha solução única.
**e)** errada, embora o sistema tenha infinitas soluções.

# ESCALONAMENTO

$$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & -9 & -10 & -6 \end{array}$$

Trocando de lugar a $L_1$ com a $L_2$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & -2 & -3 & 1 & \\ 2 & 3 & 1 & 9 & 2.L_1 - L_2 \\ 1 & -9 & -10 & -6 & L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & -2 & -3 & 1 & \\ 0 & -7 & -7 & -7 & \\ 0 & 7 & 7 & 7 & L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Dividindo $L_2$ por (-7)

$$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

GABARITO E

**(PISM III)**

Sabendo-se que o polinômio

$f(x) = 2x^3 - x^2 + 5x + a$ é divisível por $x - 3$, o valor de a é:

a) 20.

b) – 20.

c) 60.

d) – 60.

e) 78.

$$f(-3) = 0$$

$$f(-3) = 2.(-3)^3 - (-3)^2 + 5.(-3) + a$$

$$-54 - 9 - 15 + a = 0$$

$$a = 78$$

GABARITO E

**(PISM III)**

Considere o polinômio $p(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$, na variável x. Podemos afirmar que esse polinômio:

a) possui 3 raízes reais.

b) possui 2 raízes reais e uma raiz complexa.

c) possui duas raízes cujo produto é igual a 1.

d) não possui raízes reais.

e) não possui raízes racionais.

# DICAS PARA RAÍZES DE UM POLINÔMIO

Se um número complexo a + bi é raiz de um polinômio com coeficientes reais, então o seu conjugado, a - bi, também será.

Se o grau de um polinômio de coeficientes reais for ímpar, ele terá pelo menos uma raiz real e nunca terá só raízes complexas.

Se o grau de um polinômio for par e os coeficientes são reais, ele poderá ter todas as raízes complexas, todas as raízes reais ou um número par de raízes complexas e outra raiz ou raízes reais.

## Resolvendo a questão:

# Pesquisando as possíveis raízes de p(x):

p é divisor de -1 $\rightarrow$ p $\in \{-1, 1\}$

q é divisor de 2 $\rightarrow$ q $\in \{-1, 1, -2, 2\}$

$$\frac{p}{q} \in \left\{-1, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

Verificando: $p\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, então $\frac{1}{2}$ é raiz.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | - 1 | 2 | -1 |
| $\frac{1}{2}$ | 2 | 0 | 2 | 0 |

0 → RESTO

2, 0, 2 → COEFICIENTES DO NOVO POLINÔMIO DE GRAU REBAIXADO

$$2x^2 + 2 = 0 \rightarrow x = -i \text{ ou } x = i \rightarrow S = \left\{-i, i, \frac{1}{2}\right\}$$

$$i.(-i) = -i^2 = -(-1) = 1$$

GABARITO C

# (PISM III)

Seja $i = \sqrt{-1}$. Das alternativas abaixo, a única que contém dois números que podem ser raízes de um mesmo polinômio de grau 3, com coeficientes reais, é:

a) $-1+i$ e $1-i$.

b) $1+i$ e $-1+i$.

c) $1+i$ e $-1-i$.

d) $1+i$ e $1-i$.

e) $1-i$ e $-1-i$.

Como o grau é 3 e as opções de duas raízes são números complexos e os coeficientes são reais, o polinômio terá uma raiz real e duas complexas. Logo, devemos marcar a opção que possui o número complexo e o seu respectivo conjugado.

GABARITO D

## EXTRA

Dado o polinômio $p(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$:

a) Determine as raízes de p(x).

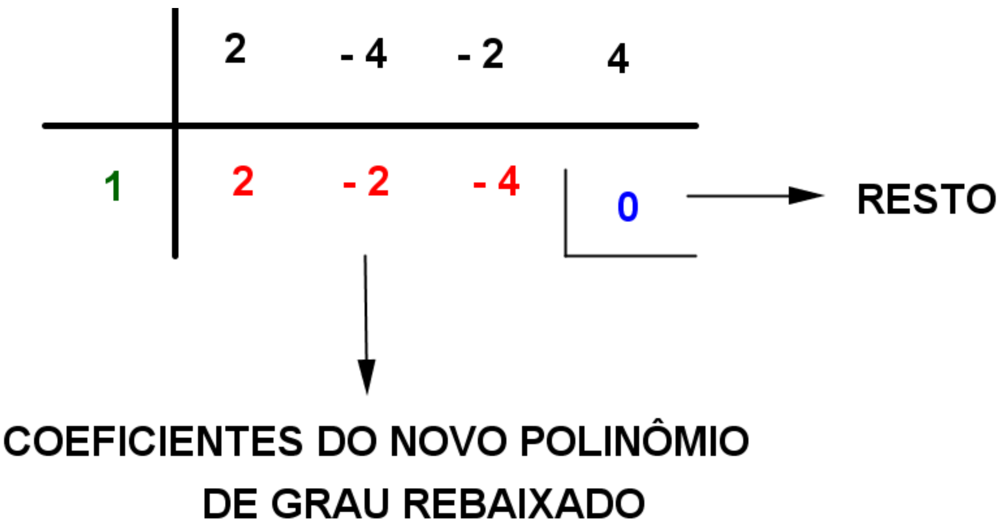
b) Decomponha p(x) em fatores do primeiro grau.

Solução:

a)Dica: se a soma dos coeficientes de um polinômio for zero, o número 1 é raiz desse polinômio.

# Continuação:

Neste caso, o 1 é raiz. Logo, podemos diminuir o grau de p(x), fazendo:




$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2 \quad \text{e} \quad x = -1$$

$$\text{Raízes: } \{-1, 1, 2\}$$

Decompondo p(x):

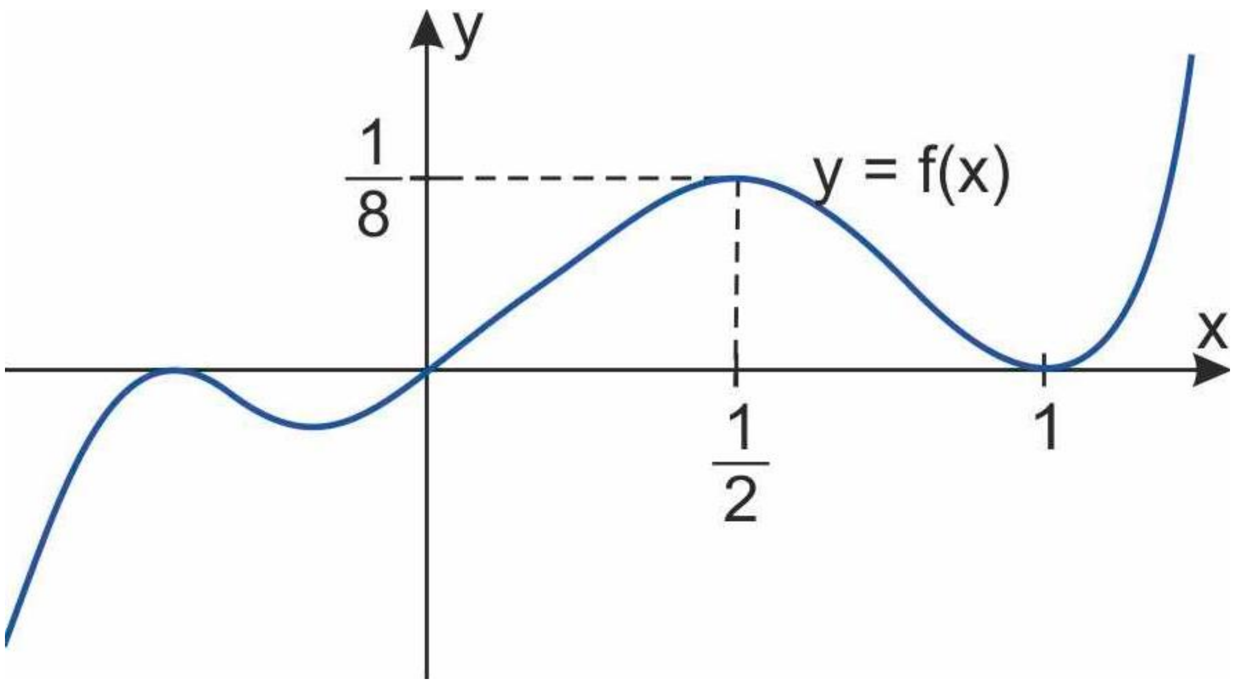
$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)...(x - x_x)$$

$x_i$ são as raízes de p(x) e $a_n$ é o coeficiente do termo de maior grau.

$$p(x) = 2.(x+1)(x-1)(x-2)$$

**EXTRA (ITA)**

Com base no gráfico da função polinomial $y = f(x)$ esboçado a seguir, responda qual é o resto da divisão de $f(x)$ por $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)$.



# Solução

O resto da divisão do polinômio f(x) por $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)$

é da forma ax + b, com a e b constantes reais. Sendo q(x)

o quociente dessa divisão, temos:

$$f(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1).q(x)+ax+b$$

$$\begin{array}{r|l} f(x) & d(x) \\ \hline r(x) & q(x) \end{array} \rightarrow f(x)=d(x).q(x)+r(x)$$

Então:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a}{2}+b \qquad f(1)=a+b$$

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2}+b=\dfrac{1}{8} \\ a+b=0 \end{cases} \rightarrow a=-\frac{1}{4} \quad \text{e} \quad b=\frac{1}{4}$$

Logo: $r(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$

# OBRIGADO E SUCESSO NO PISM III!

facebook

Keller Lopes

(32) 98421 2317

profkellerlopes@gmail.com

SOLUÇÕES PEDAGÓGICAS

SUPPORT